Complex Analysis . Notes   MYJ . 2025 . Summer

Chap 1. 复数域、扩充复平面及其球面表示 (略).

(球极投影)

复微分.

Recall some Topological ~~ch~~ properties.

1. We say $D \subseteq \mathbb{C}$ is a domain if ① D is open ② D is connected.
2. Jordan Theorem : 一条简单闭曲线 γ 将 $\mathbb{C}$ 分成两个域, 其中一是有界, 称为 γ 内部, 无界则称外部。
3. Heine-Borel Thm. A为紧集, G是A的开覆盖. 则可从 G中选出有限个开集覆盖 A。
4. Bolzano-Weierstrass Thm. 任一无穷集至少有一极限点.
5. [补] Cantor thm If $F_n \subset \mathbb{C}$ closed, $F_1 \supset F_2 \supset \cdots$, $\operatorname{diam} F_n \to 0$ $(n\to+\infty)$, we have a point x, $x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n$.

Def 1. $w = f(z)$. consider $\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$, $h \in \mathbb{C}$.

如果对所有 $h\to 0$. 极限都存在且相等, 则称 f(z) 在 z点可微. 记为 $\frac{df}{dz}$ or $f'(z)$

f(z) 在 z 处全纯. 或者 f(z) 在 $B(z,r)$ 中全纯. 即在 $B(z,r)$ 中每点可导 (微)

进一步 在定义域 $D \subseteq \mathbb{C}$ 上每点都可微. 则称 f(z) 为 D上 holomorphic function (analytic —).

Rmk: 很自然. 实函数的四则运算、复合函数微商等公式 仍可用.

$f(z) = f(x+iy) = \sqrt{|xy|}$. $z=0$ 即 $x=y=0$ 处 可微? 不可微!

即使满足了 C-R equation ?

Thm 1. $f(z) = u+iv$ 在 D 内全纯 $\iff$ u. v 在 D 内有一阶连续偏微商. 且满足 Cauchy-Riemann equation: $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \iff \frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0$

由 C-R equation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow \Delta u = 0$. — Laplace equation.

$\downarrow$

harmonic func.

$\therefore$ f is holomorphic

$\Downarrow$

u. and v are harmonic function.

$\partial_{\bar z} : \frac{\partial}{\partial \bar z} = (\partial_x + \sqrt{-1}\,\partial_y)/2$

$\partial_z := (\partial_x - \sqrt{-1}\,\partial_y)/2$

$[\, 4\partial_z \partial_{\bar z} = \Delta \,]$ 由复几何前沿. $d = \partial + \bar\partial$.

复微商有很好的几何性质 —— 共形性.

Thm2. 若 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 则 $f'(z)\neq 0$ 的点 z_0 处, $f(z)$ 是保角的.(在 z_0 保角/共形)

$f'(z_0)=0$ 处, $f(z)$ 一定不保角 (*)

Thm3 若 Ω: 单连通区域, u is harmonic on Ω 则 $\exists\, v$ 为其共轭调和函数. 使得 $f=u+iv$ 在 Ω 上是 ~~harmonic~~ holomorphic

Proof: 令 $v=\int_{z_0}^{z} \underbrace{-\frac{\partial u}{\partial y}}_{P}dx+\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{Q}dy$ $\qquad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ ($\because \Delta u=0$)

取 $z_0\in D$, $\forall z\in D$.

又 Ω 单连通 $\therefore$ 曲线积分与路径无关 $\Rightarrow$ v is well-defined.

$\therefore dv=-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy$.

Check C-R equation. $\therefore f$ is holomorphic func on Ω. ※

Solution of (*). $f(z)$ 在 z_0 全纯, 则有 $f(z)=f(z_0)+a_2(z-z_0)^2+a_3(z-z_0)^3+\cdots$ ($f'(z_0)=0$)

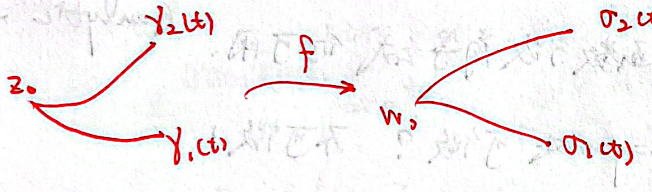
If $a_2\neq 0$. 像曲线夹角是原像夹角 2 倍.

If $a_2=0$. $\exists\, m\in\mathbb{N}$, $m\geq 3$. s.t $a_2=a_3=\cdots=a_{m-1}=0$. $a_m\neq 0$. 此时为 m 倍角.

Thm2 解释. $\sigma(t)=f(\gamma(t))$ $\quad \frac{d}{dt}\sigma_1(t)=f'(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)$. σ_1 的切线与 x 轴正向夹角 在 w_0 处

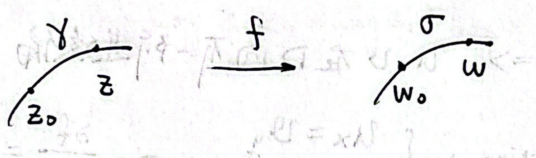
$\mathrm{Arg}\,\sigma_1'=\mathrm{Arg}\, f'(z_0)+\mathrm{Arg}\,\gamma_1'(0)$

类似有 $\sigma_2\cdots$ $\quad\therefore \mathrm{Arg}\,\sigma_2'(0)-\mathrm{Arg}\,\sigma_1'(0)=\underbrace{\mathrm{Arg}\,\gamma_2'(0)-\mathrm{Arg}\,\gamma_1'(0)}_{z_0\text{处转动角度}}$



$f(z_0)=w_0$

• 导数模的几何意义.



$\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0)$ $\qquad w=f(z)$ $\qquad \therefore \lim\limits_{z\to z_0}\frac{|w-w_0|}{|z-z_0|}=|f'(z_0)|$

"两段距离之比"

"与 γ 无关.

叫做 $f(z)$ 在 z_0 处的伸长度.

初等全纯函数 (1.幂函数, 多项式, 有理分式及其反函数. 2. 三角及反三角, 3. 指数. 对数).

2.

1. $e^x(\cos y + i\sin y) = e^z$. 其中 $z = x+yi$ $x, y \in \mathbb{R}$.

① $|e^z| = e^x > 0$. $\forall z \in \mathbb{C}$.

② $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

③ e^z 以 $2\pi i$ 为周期 ($\because e^{2\pi i} = 1$)

④ e^z 在 $\mathbb{C}$ 上全纯 且 $(e^z)' = e^z$

将 $w = f(z)$ 视为由 z 复平面上一区域到 w 平面一区域的映射. 映射是单叶. iff "1-1".

⑤ e^z 单叶域 Ω. (if f 单叶在 Ω 中).

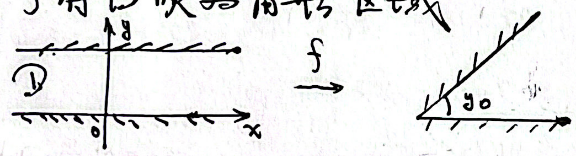
设 $e^{z_1} = e^{z_2}$. $\Rightarrow e^{z_1 - z_2} = 1$. $z_1 - z_2 = 2k\pi i$ $k \in \mathbb{Z}$.

$e^x \cdot e^{iy}$, $f(z) = re^{i\theta} = e^x \cdot e^{iy}$ $\rightarrow \begin{cases} r = e^x \\ \theta = y. \end{cases}$

极坐标.

设 $D = \{(x,y) \mid 0 < y < y_0\}$ $\underbrace{(0 < y_0 < 2\pi)}_{\text{单叶}}$.

则 f 将 D 映为角形区域



$0 < y_0 < 2\pi$.

⑥ $e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$

由 Hadamard formula 在 $\mathbb{C}$ 上 converges.

2. 与之对应的对数函数

$z \neq 0$. $e^w = z$ 的复数 w 称为 z 的对数. 记作 $\mathrm{Log}\, z$. (无穷)多值函数

令 $z = e^{i\theta} r$ $w(z) = u(z) + iv(z)$.

即 $e^{u(z)+iv(z)} = re^{i\theta}$. $\Rightarrow \begin{cases} u(z) = \log r \\ v(z) = \theta + 2k\pi \end{cases}$

$(\log z)_k$. 单值 (fix $k \in \mathbb{N}$)

$\mathrm{Log}\, z = \{\log r + i(\arg z + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ or $\mathrm{Log}\, z = \log|z| + i\underbrace{\mathrm{Arg}\, z}_{\theta + 2k\pi}$.

$\arg z \in [0, 2\pi)$

性质: $\mathrm{Log}\, z_1 z_2 = \mathrm{Log}\, z_1 + \mathrm{Log}\, z_2$

Ex. $|\sin z|$ 无界.

引伸.

$$|\sin z|^2 = |\sin(x+iy)|^2 = |\sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy)|^2$$
$$= |\sin x \cosh y + i\cos x \sinh y|^2 = \underbrace{\sinh^2 y}_{\text{无界}} + \sin^2 x.$$

3. $\sin z$ 与 $\cos z$ 的单叶性域

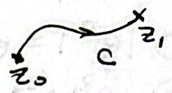
$w = \cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ $\quad \xi = iz$, $\zeta = e^{\xi}$. $w = \frac{1}{2}(\zeta + \frac{1}{\zeta})$

旋转 ↓ 单叶 不包含 $\xi_2 - \xi_1 = 2k\pi i$ 映射 不包含 $\zeta_1 \zeta_2 = 1$ 即 $e^{iz_1} \cdot e^{iz_2} = 1$ $z_1 + z_2 = 2k\pi$

∴带域 $0 < \mathrm{Re}\, z < \pi$ 为单叶区域

"多值函数：

Def 1. $F(z)$ 为多值. 在 Ω 上. 初值 $f(z_0)$ 当 z_0 沿曲线 C 连续变动到 z_1 时.
$f(z_0)$ 连续变动到唯一的 $f(z_1)$. 则称 $F(z)$ 在 C 上改变量为



$$\Delta_C F(z) = f(z_1) - f(z_0)$$

若 $\Delta_C F(z)$ 仅依赖于 $z_0, z_1, f(z_0)$ 不依赖于 C 选取. 则称 $F(z)$ 在 Ω 内有单值分支.

Def 2. (支点) "充分小"邻域

Ex. 求 $\mathrm{Arg}(z-a)$ 在 $\bar{\mathbb{C}}$ 上所有支点.

Sol: ① $\forall z_0 \in \mathbb{C}$. $z_0 \neq a$. 作任意绕 z_0 的简单闭曲线 C. a 在 C 外部.
则 $\Delta_C \mathrm{Arg}(z-a) = 0$. z_0 不为支点.

② 若 $z_0 = a$

$\Delta_C \mathrm{Arg}(z-a) = 2\pi$

③ 若 $z_0 = \infty$ 则 z_0 空心邻域 $B(\infty, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$
作 $C = \{z \mid |z| = R+1\} \subset B(\infty, R)$
$\Delta_C \mathrm{Arg}(z-a) \neq 0$.
$\therefore$ 所有支点. a 和 ∞.

Rmk: ① 不能规定以 z_0 为中心的任意小的空心邻域中围绕 z_0 的所有简单闭曲线都有 $\Delta_C F \neq 0$

Example. $F(z) = \sqrt{z}\sin\frac{1}{z}$ 支点为 $0, \infty$.
但 $z=0$ 任意小的空心邻域中. $\exists\, C_n$ 以 $z = \frac{1}{n\pi}$ (n 充分大) 为起点和终点 并绕 $z=0$ 的简单闭曲线. 有 $\Delta_{C_n} F(z) = 0$.

② 规定 z_0 充分小空心邻域内都是"寻常点"

Example. $F(z) = \sqrt{\sin\frac{1}{z}}$ $z = (n\pi)^{-1}$ $(n = \pm1, \pm2, \cdots)$ 都是支点. 但 $z=0$ 不是!

单值域：1. 不是不包含支点的区域

2. 不包含改变量不为 0 的简单闭区域的区域.
即不包含闭曲线 C s.t. $\Delta_C F(z) \neq 0$.

· 幂函数. $w = z^\alpha$

① $\alpha = n \in \mathbb{N}$. $(z^n)' = n z^{n-1}$, z^α 是 $\mathbb{C}$ 上全纯函数.

② 若 $\alpha = \frac{1}{n}$. $n \in \mathbb{N}$. 则. $\mathrm{Log}\, w = \alpha\, \mathrm{Log}\, z \Leftrightarrow e^{\mathrm{Log}\, w} = e^{\alpha \mathrm{Log}\, z}$.

$\Leftrightarrow w = e^{\frac{1}{n}(\log|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z)} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i}{n}(\arg z + 2k\pi)}$ $k \in \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$.

故 $w = z^{\frac{1}{n}}$ 有 n 个分支.

若 $\alpha\in\mathbb{C}$. $\alpha=a+bi$ 则有 $w=e^{\alpha\operatorname{Log}z}=e^{(a+bi)(\log|z|+i\operatorname{Arg}z)}$

$=e^{a\log|z|-b\operatorname{Arg}z}\cdot e^{i(b\log|z|+a\operatorname{Arg}z)}$

$b=0$. $a=n$. 单值. $w=e^{n\log|z|}=z^n$

$b=0$ $a=p/q$ 则 $w=e^{\frac{p}{q}\log|z|}\cdot e^{i\frac{p}{q}\operatorname{Arg}z}=|z|^{p/q}e^{i\frac{p}{q}\operatorname{Arg}z}$ q个支数

$\because$ 只有 $k=0,1,\cdots,q-1$ 时 q个值关于 2π 不同余.

$b=0$. $a\in\mathbb{Q}^c$. 无穷多值 z^α

$\because$ $w=e^{a\operatorname{Log}|z|}=e^{a\log|z|}\cdot e^{ia\arg z}\cdot e^{ia2k\pi}$

$ka\notin\mathbb{Z}$. $\therefore e^{i2ak\pi}$ 无穷多值.

$b\neq0$. $|w|=e^{a\log|z|-b(\arg z+2k\pi)}$ 无穷多值 $\Rightarrow$ w 为无穷多值.

· 分式线性变换. $w=f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ $\Delta=ad-bc\neq0$

若 $\Delta=0$. 则 无意义 or $f(z)=$ 常数

Special / basic cases: 1) 平移 $w=z+a$ 2) 旋转 $w=e^{i\theta}\cdot z$

3) 伸缩. $w=r\cdot z$ $(r>0)$ 4) 反演 $\frac{1}{z}$.

四种复合总能为一个分式线性变换. (or 任一个分式线性变换为上述四种复合)

lem 1. $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ $(ad-bc\neq0)$ 是 $\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$: bijection.

Proof: $f^{-1}(w): w\longrightarrow\dfrac{dw-b}{-cw+a}$ $ad-bc\neq0$.

仍为分式~. $f\circ f^{-1}=f^{-1}\circ f=\mathrm{Id}$. $\therefore$ 为双射. □

lem 2. 若分式~有3个不动点. 则必为 Id.

Proof: $\dfrac{az+b}{cz+d}=z$. $\Rightarrow$ $cz^2+(d-a)z-b=0$

有3个不同解. $\Rightarrow$ $c=b=0$. $a=d$. 即为 Id. mapping. □.

Def 1. (交比) $(z_1,z_2,z_3,z_4)=\dfrac{z_1-z_3}{z_1-z_4}:\dfrac{z_2-z_3}{z_2-z_4}$

$\Big\downarrow$ 分式~下.

不变量.

证明略. (见参考书).

· 几何性质

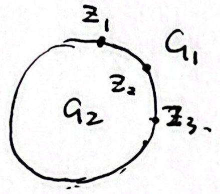
lem 3 ℂ上直线与圆周可写为

$$Az\bar{z} + \bar{B}z + B\bar{z} + C = 0,\quad A, C \in \mathbb{R},\ |B|^2 - AC > 0.$$ 统称圆周.

分式～：圆周 ⟶ 圆周

Check: ① $w = \frac{1}{z}$ ② $w = az + b\ (a \neq 0)$

Thm 1. 四点共圆 $\Longleftrightarrow \mathrm{Im}(z_1, z_2, z_3, z_4) = 0$. Pf: 略.



$f(z) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ 在圆内外的符号?

$z_1 \to z_2 \to z_3$. G_1: left. G_2: right.

保对称性(如言).

复积分. $f(t) = u(t) + iv(t)$ 为一个在实区间 $[a,b]$ 上定义的复值函数.

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt$$

γ 可求长曲线. $f(z) = u(z) + iv(z)$, $dz = dx + i\,dy$.

则 $$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma (u+iv)(dx + i\,dy) = \int_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int_\gamma v\,dx + u\,dy$$

Specially, γ 是分段可微弧段时. $z = z(t)$ $(a \le t \le b)$, $f(z)$ 在 γ 上定义且连续.

令 $$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt$$ "参数变换下不变".

性质: ① $\mathrm{Re}\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt = \int_a^b \mathrm{Re} f(t)\,dt$ Im 类似.

② $\forall c \in \mathbb{C}$. $c\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b c f(t)\,dt$

③ $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(t)|\,dt$

为便于日后过渡, 尽量用一般通行的符号来书写之。为此, 用复的外微分形式. z, $\bar{z}$ 为独立变量, 定义微分的外乘积法为

$$dz \wedge dz = 0,\quad d\bar{z} \wedge d\bar{z} = 0,\quad dz \wedge d\bar{z} = -d\bar{z} \wedge dz.$$

$dz = dx + i\,dy$, ∴ $d\bar{z} \wedge dz = 2i\,dx \wedge dy = 2i\,\underbrace{dA}_{\text{二维面积微元}}$.

定义零次外微分形式为 $f(z, \bar{z})$.

一次 …… $\omega_1\,dz + \omega_2\,d\bar{z}$

二次 …… $\omega_0\,dz \wedge d\bar{z}$

定义外微分算子 d：, $d\omega = \partial\omega \wedge dz + \bar{\partial}\omega \wedge d\bar{z}$

Obviously $dd\omega = 0$ (Poincaré lemma).

一次形式的Green公式为 $\omega = \omega_1 dz + \omega_2 d\bar{z}$ 为 Ω上一次外微分形式

高级

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \iint_{\Omega} d\omega.$$

Stokes

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega.$$

拆开. $\omega_1 = \xi_1 + i\eta_1 \in C^1(\bar{R})$, $\omega_2 = \cdots$

$d\omega = d(\omega_1 dz + \omega_2 d\bar{z}) = (\partial + \bar{\partial})(\sim)$

由 Real setting 's Green formula. □.

Chapter 2 Cauchy 积分定理与 Cauchy 积分公式.

Thm 1 (Cauchy-Green formula, Pompeiu formula)

$U \subseteq \mathbb{C}$ 有界域 $C^1(\bar{U})$. $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \in C^1(\bar{U})$.

则

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\iint_{U} \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \cdot \frac{d\bar{\zeta}\wedge d\zeta}{\zeta - z}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint_{U} \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \cdot \frac{dA}{\zeta - z}.$$

Proof: Ideas: 在z点附近作 ~~a ball~~ 小圆 $D(z,\varepsilon) \subset U$. $(\varepsilon > 0)$. 记 $U_{z,\varepsilon} = U \setminus D(z,\varepsilon)$.

考虑 differential form $\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$ 在 $U_{z,\varepsilon}$ 上. $\underset{\text{Green公式}}{\Rightarrow} \int_{\partial U} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - \int_{\partial D_{z,\varepsilon}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \iint_{U_{z,\varepsilon}} d_\zeta\left(\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\right)$ $\partial + \bar{\partial}$

$\partial\left(\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\right) = \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right) d\zeta \wedge d\zeta = 0.$

$\bar{\partial}(\sim) = \frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}} \frac{d\bar{\zeta}\wedge d\zeta}{\zeta - z} + f \underbrace{\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\left(\frac{1}{\zeta - z}\right)}_{=0} d\bar{\zeta} \wedge d\zeta$ $\therefore \iint_U d_\zeta\left(\frac{f\,d\zeta}{\zeta - z}\right) = \iint \frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}} \frac{d\bar{\zeta}\wedge d\zeta}{\zeta - z}.$

另一方面. $\int_{\partial D} \sim = \int_{\partial D} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{\partial D} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta$. $f \in C^1(\bar{U})$. $\exists\, C$ s.t. $|f(\zeta) - f(z)| < C|\zeta - z|$ on $\partial D(z,\varepsilon)$.

$\therefore |\quad| < 2\pi\varepsilon C \to 0.$ $\int_{\partial D} \sim = f(z)\int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon e^{i\theta} i\,d\theta}{\varepsilon e^{i\theta}} = 2\pi i f(z)$ $\varepsilon \to 0$ 整理 ☒

Thm 2 (Cauchy 积分公式) $U \subseteq \mathbb{C}$ 有界域. $C^1(\bar{U})$. $f(z)$ U上全纯 且 $f(z) \in C^1(\bar{U})$.

则

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Thm 3 (Cauchy 积分定理). $\cdots\cdots$ $F(z)\cdots\cdots$ $F(z) \in C^1(\bar{U})$.

则

$$\int_{\partial U} F(\zeta)\,d\zeta = 0.$$

· Thm 2' (Cauchy-Goursat 积分式) $U \subseteq \mathbb{C}$ 有界域. ∂U 为可求长简单闭曲线

若 $f(z)$ is holomorphic on U, $f \in C(\bar{U})$. we have.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi.$$

$\Updownarrow$

Thm 3' (--- ... 定理). --- 则 $\int_{\partial U} f(\xi)\,d\xi = 0$

Proof of Thm 3'. Lem 1. $f(z) \in C(G)$, $G \subseteq \mathbb{C}$. Γ 是 G 内逐段光滑曲线.

则 $\forall \varepsilon > 0$. ∃G 内的一条折线 P. s.t $\left|\int_\Gamma f(z)\,dz - \int_P f(z)\,dz\right| < \varepsilon$.

Lem 2. 若 $f(z)$ 是单连通区域 $G \subseteq \mathbb{C}$ 上的全纯函数, 则沿 G 内任意一条逐段光滑闭曲线 Γ 所积分有 $\int_\Gamma f(\xi)\,d\xi = 0$

考虑特殊区域. 对 $\forall$ 区域 U. 可用有限条平行于 y 轴的辅助线. 将 U 划分.

line 上积分抵消. □

多连通. Thm 3' 仍成立.

· 复数级数

(Cauchy ~~收敛~~ 判别准则) $\{f_n(z)\}$ 在 $E \subset \mathbb{C}$ 上一致收敛 $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$. ~~$\exists \delta(\varepsilon)$~~.

$\exists\, n_0(\varepsilon)$. s.t $\forall\, m, n > n_0$. for all $z \in E$.

$|f_m(z) - f_n(z)| < \varepsilon$.

(Weierstrass M-判别法) 若函数项级数 $f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$

定义 $a_1 + a_2 + \cdots$ 在 $E \subseteq \mathbb{C}$ 上 为正项级数. 若 $\exists\, n_0$. $M > 0$.

$n > n_0$ 时. for all $z \in E$. st $|f_n(z)| \le M a_n$ 成立. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

则 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上一致收敛.

Specially, 考虑 power series. (*) $a_0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$ 有如下.

(Abel Thm) 对于 (*). $\exists\, R$ $(0 \le R \le \infty)$ 称其为收敛半径.

(1) 每个使 $|z| < R$ 的 z. 绝对收敛. 若 $0 \le \rho < R$. 则 对于 $|z| \le \rho$. 一致收敛.

(2) z 满足 $|z| > R$. 发散.

(3) $|z| < R$ 内. 级数和为全纯函数. $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

Exercises. 1. 若 $f_n(z)$. 在 A 上连续. 且 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z) \rightrightarrows f(z)$ on A. 则 $f(z) \in C(A)$

2. ---- 可求长曲线 γ 上 … … 则 $\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{n=1}^{\infty}\int_\gamma f_n(z)\,dz$.

Taylor 级数与 Liouville 定理.

Thm1. 若 $f(z)$ 在 $U \subseteq \mathbb{C}$ 上全纯, $C(\bar{U})$, 则 $f(z)$ 在 U 上每一点各级导数都存在.

且 $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial U} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta \quad (n=1,2\cdots)$

若 $z_0 \in U$. $\bar{D}(z_0, r) = \{z \mid |z - z_0| < r\} \subset U$, 则 $f(z)$ 在 $D(z_0,r)$ 中可

展开成 Taylor 级数: $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j$

该级数在 $\bar{D}(z_0,r)$ 中绝对和一致收敛, 且有 $a_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}}\,d\zeta$.

Proof: 设 $z_0 \in U$. 作小圆 $D(z_0, r) \subset U$. 由 Thm 2'.

若 $z \in D(z_0, r)$. 则 $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,d\zeta$.

于是 $f(z) - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0}\right) f(\zeta)\,d\zeta$

$$= \frac{z - z_0}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)}\,d\zeta.$$

$$\Longleftrightarrow \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)}\,d\zeta$$

$$\therefore \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0}\right)d\zeta.$$

$$= \frac{z - z_0}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)^2}\,d\zeta. \quad (*)$$

若 z_0 到 ∂U 距离为 d (min) 取 $r = d/2$.

$\therefore |\zeta - z| \geq |\zeta - z_0| - |z - z_0|$ 但 $|\zeta - z_0| \geq d$.

$\geq d - d/2 = d/2$

故 $\left|\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)^2}\,d\zeta\right| \leq \frac{M \cdot L}{\frac{d}{2}\cdot d^2} = \frac{2ML}{d^3}$ $\quad M = \max_{\zeta \in \partial U}|f(\zeta)|$.

L = length of ∂U.

$(*)$ $\lim_{z \to z_0}$. 有 $f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2}\,d\zeta$.

即 $n=1$ 成立. 由归纳法. Assume $n = k \geq 1$ 成立.

推导 $n = k+1$. $\quad f^{(k+1)}(z_0) = \frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+2}}\,d\zeta.$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \quad (\int \text{与}\Sigma\text{可交换}).$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=0}^{\infty}(z-z_0)^j\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{j+1}}d\zeta = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}(z-z_0)^j.$$

Using $\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^j$ (How to get ?). $\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|<1$.

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{\frac{\zeta-z}{\zeta-z_0}}=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} \qquad \frac{1}{1-x}\sim\sum_{i=0}^{+\infty}x^i$$

□.

Thm2. (1) Cauchy不等式. 若 $f(z)$ 在 $U\subseteq\mathbb{C}$ 上全纯, $\overline{D}(z_0,R)\subseteq U$, 则

$$|f^{(j)}(z_0)|\le\frac{j!M}{R^j}\quad (j=1,2,\cdots)\ \text{成立}.\quad M=\max_{z\in\overline{D}(z_0,R)}|f(z)|$$

(2) 若域 $U\subseteq\mathbb{C}$, K 为 U 中一个紧集, V 为 K 的一个邻域且在 U 中是相对紧的(即 $\overline{V}\underset{\text{compact}}{\subset}U$), 则对每一个在 U 中全纯的函数 $f(z)$, $\exists\, C_n$

s.t. $\sup_{z\in K}|f^{(n)}(z)|\le C_n\|f\|_{L(V)}$ 成立. $(n=1,2,\cdots)$.

$$\|f\|_{L(V)}=\frac{1}{A(V)}\iint_V|f(\zeta)|\,dV$$

(即给出全纯函数各阶导数在的模在紧致子集合上的估计).

Proof: (1) $f^{(j)}(z_0)=\frac{j!}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{j+1}}d\zeta.$

取 $\zeta=z_0+re^{i\theta}$ $\quad |f^{(j)}(z_0)|=\frac{j!}{2\pi i}\left|\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+re^{i\theta})}{r^{j+1}e^{i\theta(j+1)}}ire^{i\theta}d\theta\right|$

$$\le\frac{j!}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{M}{R^j}\left|e^{-i\theta j}\right|d\theta. \quad \partial U\text{ 上 } r=R$$

$$=\frac{j!}{R^j}M.$$

□

(2) 在 V 上作一个 C^∞ 函数 ψ 满足在 V 上有紧致支集, 且在 K 的邻域(包在 V 中)上取值为 1.

Pompeiu formula:

$$\psi(z)f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{\psi(\zeta)f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\iint_U\frac{\partial(\psi f)}{\partial\bar\zeta}\cdot\frac{d\bar\zeta\wedge d\zeta}{\zeta-z}.$$

由于在 U 上 f 全纯, 故 $\frac{\partial(\psi f)}{\partial\bar\zeta}=\frac{\partial\psi}{\partial\bar\zeta}f$.

$\left(\frac{\partial f}{\partial\bar\zeta}=0\right)$.

但$\psi(\zeta)$的支集在V中. 而V在U中相对紧. 故

$$\psi(z)f(z)=\frac{1}{2\pi i}\iint_U f\frac{\partial\psi}{\partial\bar\zeta}\cdot\frac{d\zeta\wedge d\bar\zeta}{\zeta-z}$$

若$\frac{\partial\psi}{\partial\bar\zeta}$的支集为$K_1$. 则$K_1$为V中紧子集. 故$d(K,K_1)>0$.

若$z\in K$, 则有. $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\iint_{K_1}f(\zeta)\frac{\partial\psi}{\partial\bar\zeta}\cdot\frac{d\zeta\wedge d\bar\zeta}{(\zeta-z)}$

求n次导数. $f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\iint_{K_1}f(\zeta)\frac{\partial\psi(\zeta)}{\partial\bar\zeta}\cdot\frac{d\zeta\wedge d\bar\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}}$

$$|f^{(n)}(z)|\le\frac{n!}{2\pi}\iint_{K_1}|f(\zeta)|\left|\frac{\partial\psi(\zeta)}{\partial\bar\zeta}\right|\cdot\frac{d\zeta\wedge d\bar\zeta}{|\zeta-z|^{n+1}}$$

由于$d(K,K_1)>0$. 故$\exists C_1>0$, s.t. $\frac{1}{|\zeta-z|}<C_1$. 对$\forall z\in K$. $\zeta\in K_1$都成立.

而$\left|\frac{\partial\psi(\zeta)}{\partial\bar\zeta}\right|$在$K_1$上有界 (obviously).

$\therefore\exists C_n'$ s.t. $|f^{(n)}(z)|\le C_n'\iint_{K_1}|f(\zeta)||d\zeta\wedge d\bar\zeta|$

$$\le C_n'\iint_V|f(\zeta)||d\zeta\wedge d\bar\zeta|$$

$$=C_n\|f\|_{L(V)}\qquad\square$$

Cor 1. 若$U\subseteq\mathbb{C}$. K is compact. $V\subset U$为K的一个邻域 且在U中相对紧. 则U中每个全纯函数$f(z)$. $\exists$不依赖于z的常数C_n. s.t

$$\sup_{z\in K}|f^{(n)}(z)|\le C_n\sup_{z\in V}|f(z)|.$$

Thm 3 (Morera Thm) 若$f(z)$在U上连续. 且沿U中任意一条可求长闭曲线的积分为0. 则$f(z)$在U上全纯.

Proof: $\forall z_0\in U$. 有$F(z)=\int_{z_0}^{z}f(\zeta)d\zeta$ $(z\in U)$. 不依赖于路径选取.

且$F'(z)=f(z)$. 于是$F(z)$为U上全纯函数.

$\Rightarrow F(z)$二阶导数. 即$f'(z)\,\exists$. $\therefore f(z)$在U上是全纯的. $\square$

Thm 4 (Liouville Thm) 若$f(z)$在全平面$\mathbb{C}$上全纯且有界. 则f为常数.

Proof: 设$|f(z)|\le M$ $(z\in\mathbb{C})$. 固定$z_0\in\mathbb{C}$. 作$D(z_0,R)$. 由Cauchy不等式

$|f'(z_0)|\le\frac{M}{R}$. 令$R\to+\infty$. $|f'(z_0)|=0$ 即$f'(z_0)=0$.

z_0任意性. $f'(z)=0$. $\forall z\in\mathbb{C}$ $\therefore f(z)$在$\mathbb{C}$上为常数. $\square$

Thm 5 (Riemann Thm).

若F在去掉一点 z_0 的圆 $\hat{D}(z_0,r)=D(z_0,r)\setminus\{z_0\}$ 内全纯. 且F在 $\hat{D}(z_0,r)$ 上有界. 则F可解析开拓到 $D(z_0,r)$ 之上 即有在 $D(z_0,r)$ 上定义的全纯函数 f, s.t. $f|_{\hat{D}(z_0,r)}=F$.

Proof. 不妨假设 $z_0=0$.

Define $G(z)=\begin{cases} z^2F(z) & 当 z\in\hat{D}(0,r) \\ 0 & 当 z=0. \end{cases}$

则 $G(z)$ 在 $D(0,r)$ 上连续可导. 且 satisfies C-R-equation

$\because \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{G(z)-G(0)}{z}=\lim\limits_{z\to 0} zF(z)=0.$ $\therefore \dfrac{dG}{dz}=0.$

当 $z\neq 0$ 时. $G'(z)=z^2F'(z)+2zF'(z)$
$\downarrow$
$0\quad (z\to 0)$

$\because$ $G(z)$ 是在 $D(0,r)$ 上全纯. $\therefore$ 可在 $z=0$ 处 Taylor 展开.

$G(z)=0+0\cdot z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots$ ⟶ 收敛半径相同

此级数在 $D(0,r)$ 中收敛. Define $f(z)=\dfrac{G(z)}{z^2}=a_2+a_3z+\cdots$

$\therefore f(z)$ 在 $D(0,r)$ 上全纯. 且在 $\hat{D}(0,r)$ 中 $f(z)=F(z)$. □

· 有关零点的一些结果

Thm 1. (代数基本定理) 若 $p(z)=a_0+a_1z^1+\cdots+a_nz^n$ 为 n次多项式. 则至少有一个 z_0 使 $p(z_0)=0$

Proof: If NOT, $f(z)=\dfrac{1}{p(z)}$ is holomorphic on $\mathbb{C}$. $z\to\infty$. $p(z)\to\infty$. $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有界. 由 Liouville thm $f(z)=\text{const}\Rightarrow p(z)=\text{const}$. Contradiction! □

Thm 2 若 $f(z)$ 在域 $U\subseteq\mathbb{C}$ 上全纯, 则 $f(z)$ 的零点集合 $\{z\in U\mid f(z)=0\}$ 在 U 上无聚点 除非 $f(z)$ 在 U 上恒等于零.

证明：If NOT. $z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots$ 为 $f(z)$ 在 U 上零点，且有聚点 $z_0 \in U$

不妨假设 $z_0 = 0$ 又 $f(z)$ 在 U 上全纯，$\therefore f(z)$ 可在 0 处展 $\boxed{\text{Taylor}}$ 开。

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

$$f(z_n) = 0 \ (n = 1, 2, \cdots) \quad \lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(\lim_{n\to\infty} z_n) = f(z_0) = f(0) = 0$$

$$\therefore a_0 = 0, \quad \Rightarrow f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

$$a_1 = \frac{f(z)}{z} + O(z). \ \text{取} \ z = z_n \ \text{有} \ a_1 = \frac{f(z_n)}{z_n} + O(z_n) = O(z_n)$$

$$n \to \infty. \ a_1 = 0. \ \Rightarrow a_i = 0 \ (i = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$\therefore f(z) = 0.$$

$\Rightarrow$ 若 $f(z)$ 在 U 上并不恒等于零，则集合 $\{z \in U \mid f(z) = 0\}$ 在 U 上无聚点。 □

Thm 3（辐角原理）若 $f(z)$ 在域 $U \subseteq \mathbb{C}$ 上全纯，$\gamma \subset U$ 为一条正定向简单闭曲线，且在 U 中可连续缩成一个点，$f(z)$ 在 γ 上不为零，则 $f(z)$ 在 γ 内有有限个零点。

零点的个数 $k = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz$.

Rmk: 若记 $w = f(z)$, $z = z(t)$ $(t \in [a, b])$ 是 γ 的与定向相符的参数表示，$w(t) = f(z(t))$

则有 $$k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma \operatorname{Arg} w$$

其中 Γ 为 γ 在 $w = f(z)$ 下的像。$\Delta_\gamma \operatorname{Arg} w$ 表示当 z 在 γ 上正向绕行一周时

w 在 Γ 上的辐角变化。这恰好说明了当 z 沿 γ 正方向转动一周时，$w = f(z)$

在 Γ 上沿正方向绕原点转动的总圈数，正巧等于 f 在 γ 内的零点个数。

证明：设 $f(z)$ 在 γ 内零点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 且重数分别为 $k_1, k_2, \cdots k_n$. 在每个零点处 z_i

以 z_i 为圆中心，$\varepsilon_i > 0$ 为半径，作圆 γ_i. 让 γ_i 在 γ 内，且两两互不相交。

由 Cauchy 积分公式，$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

又因 $f(z)$ 在 $z = z_i$ 处为 k_i 重零点，于是在 γ_i 内，$f(z)$ 可写成

$$f(z) = (z - z_i)^{k_i} h_i(z) \quad h_i(z) \neq 0 \quad z \in \gamma_i \text{内}.$$

$$\therefore f'(z) = k_i (z - z_i)^{k_i - 1} h_i(z) + (z - z_i)^{k_i} h_i'(z)$$

$$f'(z)/f(z) = \frac{k_i}{z - z_i} + \frac{h_i'(z)}{h_i(z)} \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_i} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = k_i.$$

$$\therefore \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma u \, dz = \sum_{i=1}^n k_i = k$$

□

Thm 4 (Hurwitz Theorem) 若 $\{f_j\}$ 为 $U\subseteq\mathbb{C}$ 上的全纯函数序列，在 U 内紧致集上一致收敛（即内闭一致收敛）到一个函数 f，若所有 f_j 在 U 上全不等于 0，则 f 恒不等于零 or 恒等于零。

Proof：$\forall z\in U$，取一条简单闭曲线 $\gamma\subset U$，且 z 在 γ 包含区域内

$\because f_j$ 在 U 上全纯，由 Cauchy 积分公式，$f_j(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f_j(\xi)}{\xi-z}d\xi$

由内闭一致收敛 $\therefore \lim\limits_{j\to\infty}f_j(z)=\lim\limits_{j\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f_j(\xi)}{\xi-z}d\xi$

(lim 与 $\int$ 可换)

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\lim_{j\to\infty}f_j(\xi)\ \frac{1}{\xi-z}d\xi$$

$\therefore f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi \Rightarrow f$ is holomorphic func.

同样可证 $f_j'(z)$ 内闭一致收敛于 $f'(z)$.

若 $f(z)\not\equiv 0$ 则 $f(z)$ 零点是离散的，取 γ 不经过这些零点

$j\to\infty$，有 $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f_j'(\xi)}{f_j(\xi)}d\xi\longrightarrow\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}d\xi$

由假设 + 辐角原理 $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f_j'(\xi)}{f_j(\xi)}d\xi=0$ $\therefore\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}d\xi=0$

即 $f(z)$ 在 U 上无零点. □

Thm 5 (Rouché theorem) 若 $f(z)$、$g(z)$ 在 $U\subseteq\mathbb{C}$ 上全纯，γ 为 U 内可求长简单闭曲线，且在 γ 上满足 $|f(z)-g(z)|<|f(z)|$ (*).

则 f、g 在 γ 内有相同的零点个数

证明：由(*)知，在 γ 上 $|f(z)|>0$，且 $g(z)\neq0$。如不然，在 γ 上存在一点 z_0 s.t $g(z_0)=0$，$|f(z_0)|<|f(z_0)|$ ×，

令 N_1、N_2 分别为 f、g 在 γ 内零点个数，由辐角原理，

$$N_1=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)}dz,\quad N_2=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{g'(z)}{g(z)}dz$$

$$\therefore\ N_2-N_1=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left(\frac{g'(z)}{g(z)}-\frac{f'(z)}{f(z)}\right)dz=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{fg'-f'g}{gf}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{(g/f)'}{g/f}dz$$ 令 $F(z)=g(z)/f(z)$.

则 $N_2-N_1=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F'(z)}{F(z)}dz$.

又 $|F(z)-1|<1$. $w=F(z)$ 将 γ 映为 Γ. Γ 不经过原点 也不包含原点

$\therefore$ Γ 在 $|w-1|<1$ 之内. 由 Cauchy 积分定理. $\int_\Gamma \frac{dw}{w}=0$ 即 $N_1=N_2$. □

Rmk: 前面已经证明: 若 $p(z)=a_nz^n+\cdots+a_1z+a_0$ 为 n 次多项式 则至少有一个根. 即有零点. z_0. $p(z_0)=0$

现用 Rouché 定理. 若 $a_n\neq0$. 则 $p(z)$ 有且只有 n 个零点.

Sketch of Proof 令 $g(z)=a_nz^n$ 则 $|z|=R$ large enough.

$$|p(z)-g(z)|=|a_{n-1}z^{n-1}+a_{n-2}z^{n-2}+\cdots+a_0|$$
$$<|g(z)|=|a_nz^n|=|a_n|R^n$$

由 Rouché thm. $|z|<R$ 内. $p(z)$ 与 $g(z)$ 有相同的零点个数. $\therefore$ $p(z)$ n roots □.

Cor 1. 若 $f(z)$ 在 $U\subseteq\mathbb{C}$ 上全纯, $w_0=f(z_0)$ ($z_0\in U$). 若 z_0 是 $f(z)-w_0$ 的 m 重零点. 则对于充分小的 $\rho>0$. 存在 $\delta>0$. 使得对于 $D(w_0,\delta)$ 内每一个 A, 函数 $f(z)-A$ 在 $D(z_0,\rho)$ 内恰有 m 个零点

Proof: z_0 是 $f(z)-f(z_0)$ 的 m 重零点. 则 $\exists\rho>0$. s.t $f(z)-f(z_0)$ 在 $\overline{D}(z_0,\rho)\subset U$ 上 除去 z_0 ~~零点~~ 外 没有其它零点. 而在 $|z-z_0|=\rho$ 上, $|f(z)-f(z_0)|\geq\delta$ ($\delta>0$).

于是在 $D(w_0,\delta)$ 内 任意点 A. 当 $|z-z_0|=\rho$ 时. $|A-w_0|<|f(z)-f(z_0)|$ 成立, 此即 $|(f(z)-f(z_0))-(f(z)-A)|<|f(z)-f(z_0)|$ 成立

由 Rouché thm. $f(z)-A$ 与 $f(z)-f(z_0)$ 在 $D(z_0,\rho)$ 上 相同零点个数. m 个 □

- 最大模原理 与 Schwarz 引理.

在叙述定理之前. 先来证明 全纯函数的均值性质 (M.V.P)

若 $f(z)$ 在 $D\subseteq\mathbb{C}$ 上全纯, $z_0\in U$. 若 $r>0$. s.t $\overline{D}(z_0,r)\subset U$;

由 Cauchy 积分公式.

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\overline{D}(z_0,r)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta \qquad \partial D(z_0,r) \text{ 上的点 } \zeta=z_0+re^{i\theta} \quad \theta\in[0,2\pi]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+re^{i\theta})}{re^{i\theta}}rie^{i\theta}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})d\theta.$$

□

Thm 1 (最大模原理). 若 $f(z)$ 在域 $U\subseteq\mathbb{C}$ 上全纯. 如有 $z_0\in U$ s.t $|f(z_0)|\geq|f(z)|$ 对所有 z 成立. 则 $f(z)$ 必为常数

Proof: 乘以模为1的常数. s.t $M=f(z_0)\geq 0$. 令 $S=\{z\in U\mid f(z)=f(z_0)\}$.

$z_0\in S$. $\therefore S\neq\phi$.

由于 f 为 U 上连续函数. 故 S 为 closed set. WTS S is open.

若 $w\in S$, 取 $r>0$ s.t $D(w,r)\subseteq U$. 取 r'. $0<r'<r$.

由 MVP; $M=f(w)=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(w+r'e^{i\theta})\,d\theta\right|$

$$\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(w+r'e^{i\theta})|\,d\theta\leq M$$

$\therefore |f(w+r'e^{i\theta})|=f(w+r'e^{i\theta})=M$

对 all θ, $0<r'<r$ 成立. 于是

$\{w+r'e^{i\theta}\mid 0\leq\theta\leq 2\pi,\ 0<r'<r\}\subseteq S$ $\therefore S$ is open

由于 U 是连通的. $\therefore S=U$. 即 $f(z)$ 在 U 上 $f(z)\equiv M$. □

直接推论得到 单位圆 D 的

全纯自同构群. (略. 后可能会补充). $\mathrm{Aut}(D)$.

Thm 2 (Schwarz 引理).

若 $f(z)$ 为将 单位圆 $D=D(0,1)$ 映入到 D 的全纯函数. 且 $f(0)=0$.

则 $|f(z)|\leq|z|$. 及 $|f'(0)|\leq 1$ 成立. 而 $|f(z)|=|z|$ 在 D 中一点 $z\neq 0$ 处成立 或 $|f'(0)|=1$ 成立 当且仅当 $f(z)=e^{i\tau}z$ $\tau\in\mathbb{R}$.

Proof: 令 $G(z)=\begin{cases}f(z)/z & z\neq 0\\ f'(0) & z=0\end{cases}$ 则 $G(z)$ 在 D 上全纯.

对 G 在 $\{z\mid |z|\leq 1-\varepsilon\}$ $(\varepsilon>0)$ 上应用 Max Modulus Principle.

得到 $|G(z)|\leq\dfrac{\max_{|z|=1-\varepsilon}|f(z)|}{1-\varepsilon}<\dfrac{1}{1-\varepsilon}$ 令 $\varepsilon\to 0^+$. 即有

$|G(z)|\leq 1\Rightarrow|f(z)|\leq|z|$. ($z=0$ 时. $|G(0)|=|f'(0)|\leq 1$.)

$z\neq 0$

若 $|f(z)|=|z|$ 在 D 中一点 $z\neq 0$ 处成立. 即 $|G(z)|=1$ 在 D 中 $z\neq 0$ 处成立.

由最大模原理, $|G(z)|=1$ 对 all $z\in D$ 成立

$\therefore G(z)=e^{i\tau}$ $(\tau\in\mathbb{R})$. 即 $f(z)=e^{i\tau}z$.

类似可证. $|f'(0)|=1$ 时. $f(z)=e^{i\tau}$ 结论 □.

Chapter 3. Weierstrass 级数理论

一. Laurent 级数

Thm 1 (Weierstrass Theorem) 若 $\{f_n(z)\}$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 $U\subseteq\mathbb{C}$ 上全纯，且 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 U 上内闭一致收敛到 $f(z)$，则 $f(z)$ 在 U 上全纯，且 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ 内闭一致收敛至 $f^{(k)}(z)$ $(k=1,2\cdots)$

Proof: 易知 $f(z)$ 在 U 中有定义且连续

若 K 为 U 内任一圆周，其内部属于 U，γ 为 K 内任一可求长闭曲线.

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 γ 上一致收敛. $\longrightarrow \int_\gamma f(z)dz=\sum_{n=1}^{\infty}\int_\gamma f_n(z)dz=0$

这是因为 $f_n(z)$ 在 K 内全纯. 由 $\int_\gamma f(z)dz=0$. 由 Morera Thm.

$\Rightarrow f(z)$ 在 K 内全纯. ∴ 在 U 上全纯. ✓

若 $z_0\in U$, $\overline{D}(z_0,r)\subset U$ 则 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 在 $\partial D(z_0,r)$ 上一致收敛到 $f(z)$.

若 $z\in D(z_0,r/2)$ 有

$$\sup_{z\in\overline{D}(z_0,r/2)}\left|\sum_{j=1}^{n}f_j^{(k)}(z)-f^{(k)}(z)\right|\le C_n\left|\sum_{j=1}^{n}f_j(z)-f(z)\right| \text{ 成立.}$$

$n\to\infty$. 右式 $\to 0$. 故 $\sum_{j=1}^{n}f_j^{(k)}$ 在 $\overline{D}(z_0,r/2)$ 上一致收敛于 $f^{(k)}(z)$

对于 U 中任一有界闭域 $\overline{d}$. 在 $\overline{d}$ 的每一点邻域内 O_i

$\sum_{j=1}^{\infty}f_j^{(k)}(z)\rightrightarrows f^{(k)}(z)$. on 每 O_i. $\{O_i\}_{i\in I}$ cover $\overline{d}$.

U上内闭一致收敛.

由 Heine-Borel Thm. 选 $\overline{d}$ 的 finite open cover. $(O_i)_{i=1}^{n}$

∴ $\sum_{j=1}^{\infty}f_j^{(k)}(z)\Longrightarrow f^{(k)}(z)$ on $\overline{d}$. □

Def 1 $a\in\mathbb{C}$. C_n $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为复常数. 则称 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n(z-a)^n$ (*)

为在 a 点的 Laurent 级数.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n(z-a)^n=\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n}_{\text{全纯部分 }\varphi}+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}C_{-n}(z-a)^{-n}}_{\text{主要部分 }\psi}$$

Two parts both converges at $z=z_0$. we say Laurent 级数 converges at $z=z_0$.

收敛圆环 $r<|z-a|<R$

级数(*)在此圆环内绝对收敛且内闭一致收敛.

和函数 $f(z)$ 在 ↓ 上全纯

Thm2 若函数 $f(z)$ 在圆环 $V: r<|z-a|<R$ $(0\le r<R<\infty)$ 上全纯，则

$f(z)$ 在 V 上有展开式 $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z-a)^n$ $(*)$

其中 $C_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|\zeta-a|=\rho}\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta$ $(r<\rho<R)$ $(**)$

展开式 $(*)$ 是唯一的，称为 $f(z)$ 在 V 上的 Laurent 展开式。

Proof：$(**)$ 中积分与 ρ 无关 $(r<\rho<R)$。若 $r<\rho_1<\rho_2<R$，

则 $$\int_{|\zeta-a|=\rho_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta=\int_{|\zeta-a|=\rho_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta$$

若 $z\in V$，在 V 内取 $\gamma_1=\partial D(a,r_1)$，$\gamma_2=\partial D(a,r_2)$，$\underline{r_1<r_2}$。

而 z 在圆环 $r_1<|z-a|<r_2$ 之间，由 Cauchy 积分公式：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \quad (***)$$

1. $\zeta\in\gamma_1$ 时 $\dfrac{1}{\zeta-z}=-\dfrac{1}{(z-a)\left(1-\frac{\zeta-a}{z-a}\right)}=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\zeta-a)^{n-1}}{(z-a)^n}$ $\because \left|\dfrac{\zeta-a}{z-a}\right|<1$

$\therefore$ γ_1 上一致收敛。

2. $\zeta\in\gamma_2$ 时 $\left|\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right|<1$，$\dfrac{1}{\zeta-z}=\dfrac{1}{(\zeta-a)\left(1-\frac{z-a}{\zeta-a}\right)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}$ $\therefore$ γ_2 上一致……

代入 $(***)$ 即可。 □

唯一性：不妨设 V 上还有一个 Laurent 展式

$f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}C_n'(z-a)^n$ $(r<|z-a|<R)$ 且 $|z-a|=\rho$ 上一致收敛到 $f(z)$

$$\int_{|z-a|=\rho}\frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}}dz=\sum C_n'\int(z-a)^{n-m-1}dz=2\pi i C_m'$$

$$\because \int_{|z-a|=\rho}(z-a)^k dz=\begin{cases}2\pi i & \text{if } k=-1\\ 0 & \text{if } k\neq-1\end{cases}$$

$\therefore C_m'=C_m$ $(m=0,\pm1,\pm2\cdots)$ □

二. 孤立奇点

Def 1. 若 $f(z)$ 在点 a 的去心邻域 $D(a,R)\setminus\{a\}$ 上全纯, 则称 a 点为 $f(z)$ 的一个孤立奇点

Def 2. a 为 $f(z)$ 孤立奇点 (可为 ∞)

(1) $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ $\exists$ (有限复数), 则称 a 为可去奇点

(2) $\lim\limits_{z\to a} f(z)=+\infty$, ~ a 是 $f(z)$ 的极点

(3) lim 不存在, 则 ··· 本性奇点

Thm 1. $a\in\mathbb{C}$, $f(z)$ 在 $D(a,R)\setminus\{a\}$ 内解析, 则下列命题等价.

(1) a 是 $f(z)$ 可去奇点

(2) $f(z)$ 是 $D(a,r)\setminus\{a\}$ $(r\le R)$ 上有界: $|f(z)|\le M$

(3) $f(z)$ 的 Laurent 展式的负幂次系数皆为零. or $\psi(z)\equiv 0$